

1.- DATOS DE LA ASIGNATURA

Nombre de la asignatura:	Cálculo Integral
Carrera:	Todas las Ingenierías
Clave de la asignatura:	ACF-0902
(Créditos) SATCA ¹	3 - 2 - 5

2.- PRESENTACIÓN

Caracterización de la asignatura.

Esta asignatura contribuye a desarrollar un pensamiento lógico, heurístico y algorítmico al modelar fenómenos y resolver problemas en los que interviene la variación.

Hay una diversidad de problemas en la ingeniería que son modelados y resueltos a través de una integral, por lo que resulta importante que el ingeniero domine el Cálculo integral.

El problema esencial del Cálculo integral es calcular áreas de superficies, particularmente el área bajo la gráfica de una función; de manera más sencilla, sumar áreas de rectángulos. Varios conceptos son descritos como el producto de dos variables; por ejemplo: trabajo, como fuerza por distancia; fuerza como el producto de la presión por el área; masa como densidad por volumen. Si cada uno de los factores que componen el producto se asocian con cada uno de los ejes coordenados; el producto se asocia en el plano con una área que puede ser calculada a través de una integral.

En general, si se define un plano p q , entonces la integral nos permite calcular áreas en este plano, las unidades del área resultante están definidas por las unidades de los factores.

Intención didáctica.

Buscando la comprensión del significado de la integral se propone un tratamiento que comience por lo concreto y pase luego a lo abstracto, así se sugiere que la integral definida se estudie antes de la indefinida puesto que aquella puede ser abordada a partir del acto concreto de medir áreas.

Se incluye la notación sumatoria para que el alumno la conozca y la maneje en la representación de sumas de Riemann. La función primitiva se define junto con el Teorema Fundamental por estar íntimamente ligados. Las integrales impropias se ubican en esta unidad por ser un caso de integral definida, para aprovechar el contexto.

¹ Sistema de asignación y transferencia de créditos académicos

Una vez que se abordó la construcción conceptual de la integral definida, se estudian la integral indefinida y los métodos de integración, para tener más herramientas en la construcción de la antiderivada, necesaria para aplicar el Teorema Fundamental.

Las aplicaciones incluidas en el temario son las básicas, adecuadas a las competencias previas de los estudiantes, con el objetivo que sean ellos quienes planteen por sí mismos la integral a aplicar y resolver. Se complementa el tratamiento de aplicaciones con la identificación, por parte del alumno, de la integral en diferentes temas de ingeniería.

Se incluye la serie de Taylor puesto que el cálculo de algunas integrales se facilita o posibilita representando la función a integrar como una serie de potencias.

La lista de prácticas y actividades de aprendizaje recomendadas no es exhaustiva, se han incluido ejemplos que pretenden favorecer el desarrollo de las competencias. En dichas actividades se especifica la participación del alumno con la intención de resaltar su papel activo. En algunas unidades se sugiere iniciar el tratamiento del tema con la realización de una práctica, esto obedece a lo expuesto arriba: partir de lo concreto para llegar a lo abstracto.

3.- COMPETENCIAS A DESARROLLAR

Competencias específicas	Competencias genéricas
<ul style="list-style-type: none"> • Contextualizar el concepto de Integral. • Discernir cuál método puede ser más adecuado para resolver una integral dada y resolverla usándolo. • Resolver problemas de cálculo de áreas, centroides, longitud de arco y volúmenes de sólidos de revolución. • Reconocer el potencial del Cálculo integral en la ingeniería. 	<ul style="list-style-type: none"> • Modelar matemáticamente fenómenos y situaciones. • Pensar lógica, algorítmica, heurística, analítica y sintéticamente. • Argumentar con contundencia y precisión. • Procesar e interpretar datos. • Representar e interpretar conceptos en diferentes formas: numérica, geométrica, algebraica, trascendente y verbal. • Comunicar ideas en el lenguaje matemático en forma oral y escrita. • Reconocer conceptos o principios generales e integradores. • Establecer generalizaciones. • Potenciar las habilidades para el uso de tecnologías de la información. • Resolver problemas.

	<ul style="list-style-type: none"> • Analizar la factibilidad de las soluciones. • Optimizar soluciones. • Tomar decisiones. • Transferir el conocimiento adquirido a otros campos de aplicación.
--	---

4.- HISTORIA DEL PROGRAMA

Lugar y fecha de elaboración o revisión	Participantes	Observaciones (cambios y justificación)
Cd. de Matamoros, Tamaulipas del 9 al 13 de Marzo de 2009.	Representantes de los Institutos Tecnológicos de León, Matamoros, Mérida y Milpa Alta.	Definición de los temarios.
Cd. de Puebla, Puebla del 8 al 12 de junio del 2009	Representantes de los Institutos Tecnológicos de León, Matamoros, Mérida y Milpa Alta.	Consolidación de los temarios.

5.- OBJETIVO(S) GENERAL(ES) DEL CURSO (competencia específica a desarrollar en el curso)

- Contextualizar el concepto de Integral.
- Discernir cuál método puede ser más adecuado para resolver una integral dada y resolverla usándolo.
- Resolver problemas de cálculo de áreas, centroides, longitud de arco y volúmenes de sólidos de revolución.
- Reconocer el potencial del Cálculo integral en la ingeniería.

6.- COMPETENCIAS PREVIAS

- Usar eficientemente la calculadora, respetando la jerarquía de operadores.
- Evaluar funciones trascendentes.
- Despejar el argumento de una función.
- Dominar el álgebra de funciones racionales así como de expresiones con potencias y radicales.
- Identificar, graficar y derivar funciones trigonométricas y sus inversas.
- Manejar identidades trigonométricas.
- Identificar, graficar y derivar funciones exponenciales y logarítmicas.

- Bosquejar la gráfica de una función a partir de su expresión analítica y asociar una expresión analítica a una gráfica dada para las funciones más usadas.
- Calcular límites de funciones.
- Calcular derivadas y diferenciales de funciones algebraicas y trascendentes.
- Transcribir un problema al lenguaje matemático.
- Determinar las intersecciones entre gráficas de funciones.

7.- TEMARIO

Unidad	Temas	Subtemas
1	Teorema fundamental del cálculo.	1.1 Medición aproximada de figuras amorfas. 1.2 Notación sumatoria. 1.3 Sumas de Riemann. 1.4 Definición de integral definida. 1.5 Teorema de existencia. 1.6 Propiedades de la integral definida. 1.7 Función primitiva. 1.8 Teorema fundamental del cálculo. 1.9 Cálculo de integrales definidas. 1.10 Integrales Impropias.
2	Integral indefinida y métodos de integración.	2.1 Definición de integral indefinida. 2.2 Propiedades de integrales indefinidas. 2.3 Cálculo de integrales indefinidas. 2.3.1 Directas. 2.3.2 Con cambio de variable. 2.3.3 Trigonométricas. 2.3.4 Por partes. 2.3.5 Por sustitución trigonométrica. 2.3.6 Por fracciones parciales.
3	Aplicaciones de la integral.	3.1 Áreas. 3.1.1 Área bajo la gráfica de una función. 3.1.2 Área entre las gráficas de funciones. 3.2 Longitud de curvas. 3.3 Cálculo de volúmenes de sólidos de sólidos de revolución. 3.4 Cálculo de centroides. 3.5 Otras aplicaciones.

TEMARIO (continuación)

Unidad	Temas	Subtemas
4	Series.	4.1 Definición de serie. 4.1.1 Finita. 4.1.2 Infinita. 4.2 Serie numérica y convergencia Prueba de la razón (criterio de D'Alembert) y Prueba de la raíz (criterio de Cauchy). 4.3 Serie de potencias. 4.4 Radio de convergencia. 4.5 Serie de Taylor. 4.6 Representación de funciones mediante la serie de Taylor. 4.7 Cálculo de Integrales de funciones expresadas como serie de Taylor.

8.- SUGERENCIAS DIDÁCTICAS (desarrollo de competencias genéricas)

- En las actividades de aprendizaje y prácticas sugeridas, se hace necesario que el profesor haga una mediación oportuna y moderada: oportuna, para no dejar que la frustración embargue al alumno; moderada, para permitirle pensar. Debe tenerse presente que las respuestas o acciones del estudiante, durante el proceso de construcción, no necesariamente serán inmediatas, ni las esperadas, por lo que deberá tomarse lo rescatable de cada aportación y orientar la discusión para la obtención del logro de las competencias.
- Usar elementos tangibles, actividades concretas con las que puedan iniciarse algunos temas a lo largo del curso para que el alumno tenga un primer acercamiento y de manera intuitiva inicie la conceptualización.
- Diseñar y proponer problemas en los que haya información no necesaria para propiciar que el alumno discrimine entre la información relevante e irrelevante.
- Usar el origen histórico de algunos de los temas para darles contexto y que el alumno conozca cómo se generó el conocimiento.
- Fomentar actividades grupales que propicien la comunicación, el intercambio de ideas, la reflexión, la integración y colaboración de pares.
- Propiciar el uso de software educativo.
- Llevar a cabo actividades prácticas que promuevan el desarrollo de habilidades para la experimentación, tales como: observación, identificación, manejo y control de variables y datos relevantes.
- Propiciar el uso adecuado de conceptos y de terminología científico-tecnológica.

- Interrelacionar las academias correspondientes, promoviendo reuniones en las que se discutan las necesidades de aprendizaje de los estudiantes y la profundidad con que se abordará cada uno de los temas. También es deseable que esas reuniones se analicen problemas que relacionen la materia con otras.
- Contextualizar los contenidos del curso en situaciones de la vida real destacando la pertinencia y relevancia en su carrera profesional.

9.- SUGERENCIAS DE EVALUACIÓN

La evaluación debe ser continua y cotidiana por lo que se debe considerar el desempeño en cada una de las actividades de aprendizaje, haciendo especial énfasis en:

- Reportes escritos de las observaciones hechas durante las actividades, así como de las conclusiones obtenidas de dichas observaciones.
- Información obtenida durante las investigaciones solicitadas plasmada en documentos escritos.
- Descripción de otras experiencias concretas que podrían realizarse adicionalmente.
- Exámenes escritos para comprobar el manejo de aspectos teóricos y declarativos.

10.- UNIDADES DE APRENDIZAJE

Unidad 1: Teorema fundamental del cálculo.

Competencia específica a desarrollar	Actividades de Aprendizaje
<ul style="list-style-type: none"> • Contextualizar el concepto de integral definida. • Visualizar la relación entre cálculo diferencial y el cálculo integral. • Calcular integrales definidas. 	<ul style="list-style-type: none"> • Actividad del alumno: Se propone realizar la práctica 1.1. • Actividad del alumno: Para una colección de funciones simples (como $y = 1, y = x, y = e^x, y = x^2 \dots$) construir la primitiva a partir de la definición. • Actividad del alumno: Realizar la práctica 1.2. • Actividad conjunta maestro-alumno: Consultar el enunciado del Teorema Fundamental del Cálculo y establecer la relación entre el enunciado y las conclusiones de la práctica 1.1. Se sugiere que en este punto el profesor haga un cierre, precisando el Teorema.

	<ul style="list-style-type: none"> • Actividad del alumno: Calcular integrales definidas diversas y asociar cada integral con su interpretación geométrica. • Actividad del maestro: proponer entre las integrales a resolver, algunas que se asocien con áreas negativas. • Verificar el Teorema Fundamental con pares de funciones y y y' diferentes a las que se usaron en la práctica 1.1. • Hacer un resumen sobre el desarrollo histórico del cálculo con base en los textos que se sugieren en la bibliografía o algunas otras fuentes. Agregar al resumen comentarios personales.
--	---

Unidad 2: Integral indefinida y métodos de integración.

Competencia específica a desarrollar	Actividades de Aprendizaje
<ul style="list-style-type: none"> • Discernir cuál método puede ser más adecuado para resolver una integral dada y resolverla usándolo. • Determinar una función primitiva. 	<ul style="list-style-type: none"> • Utilizar las propiedades de linealidad de la integral indefinida para obtener la primitiva de otras funciones. • Resolver integrales que requieran modificación o interpretación para adecuarlas a una fórmula. • Actividad maestro: Abordar cada nuevo método proponiendo integrales que no puedan ser resueltas con los métodos previos. (Adquirir una nueva herramienta cuando las que ya se tienen resultan insuficientes). • Ante un grupo de integrales a resolver, seleccionar el método más adecuado según la función integrando y resolver la integral aplicando el método. • Actividad maestro: Incluir límites de integración constantes y con expresiones en algunas de las integrales a resolver. Límites constantes para reforzar la competencia en evaluación de la integral definida y límites con expresiones para anticipar aplicaciones en el Cálculo de varias variables.

Unidad 3: Aplicaciones de la integral.

Competencia específica a desarrollar	Actividades de Aprendizaje
<ul style="list-style-type: none">• Interpretar enunciados de problemas para construir la función que al ser integrada da la solución.• Resolver problemas de cálculo de áreas, centroides, longitud de curvas y volúmenes de sólidos de revolución.• Reconocer el potencial del Cálculo integral en la ingeniería.	<ul style="list-style-type: none">• Actividad conjunta maestro-alumno: Plantear la integral que resuelva el cálculo del área delimitada por una función.• Actividad conjunta maestro-alumno: Para el cálculo de áreas entre funciones: graficarlas e identificar el área a calcular y el intervalo de integración; construir la integral definida y resolverla. Sugerencia: utilizar software de matemáticas para graficar las funciones menos conocidas.• Desarrollar la práctica 3.1.• Actividad del alumno: Hacer una recopilación de expresiones matemáticas en las que aparezcan integrales en la bibliografía de ingeniería identificando de qué tema se trata y las variables físicas que están involucradas en la expresión. Participar en una plenaria en la que se intercambien los productos de la recopilación.• Actividad del alumno: Elaborar enunciados de problemas de aplicación de la integral, inéditos. Pudiera ser modificando condiciones de otro ya resuelto, dando además solución al nuevo problema.• Actividad del alumno: Realizar la práctica 3.2.

Unidad 4: Series.

Competencia específica a desarrollar	Actividades de Aprendizaje
<ul style="list-style-type: none">• Identificar series finitas e infinitas en distintos contextos• Determinar la convergencia de una serie infinita.• Usar el teorema de Taylor para representar una función en serie de potencias y aplicar esta representación para calcular la integral de la función.	<ul style="list-style-type: none">• Realizar la práctica 4.1.• Actividad del maestro: Formalizar a partir de la práctica 4.1 los conceptos: serie finita y serie numérica.• Realizar la práctica 4.2.• Actividad del maestro: Formalizar a partir de la práctica 4.2 los conceptos: serie infinita y convergencia de una serie.• Actividad del maestro: Presentar la serie de potencias y su convergencia• Actividad conjunta maestro-alumno: Calcular radios de convergencia de diversas series.• Actividad del alumno: Buscar series en distintos campos de la ciencia registrando la serie y el contexto en el que tiene aplicación. Participar en una plenaria en la que se intercambien los productos de la búsqueda.• Actividad del maestro: Presentar la serie de Taylor como un caso particular de serie de potencias. Comentar la serie de Maclaurin.• Actividad del alumno: Encontrar la serie de Taylor de diversas funciones propuestas.• Realizar la práctica 4.3.• Actividad del alumno: representar funciones como una serie de Taylor usando software de matemáticas. Actividad del maestro: proponer para lo anterior, funciones que requieren gran trabajo de cálculo.• Actividad del alumno: resolver integrales que requieran representar la función con la serie de Taylor.• Hacer un resumen sobre el desarrollo histórico de las series con base en los textos que se sugieren en la bibliografía o algunas otras fuentes. Agregar al resumen comentarios personales.

11.- FUENTES DE INFORMACIÓN

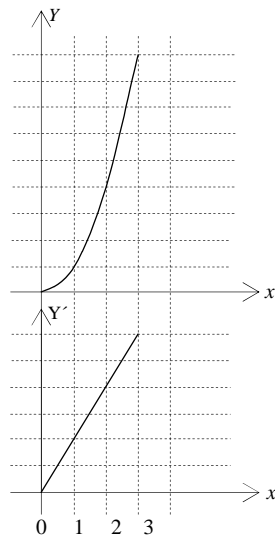
1. Stewart, James B. *Cálculo con una Variable*. Editorial Thomson,
2. Larson, Ron. *Matemáticas 2 (Cálculo Integral)*, McGraw-Hill, 2009.
3. Swokowski Earl W. *Cálculo con Geometría Analítica*. Grupo Editorial iberoamericana, 1998.
4. Leithold, Louis. *El Cálculo con Geometría Analítica*, Editorial Oxford University Press, 2009.
5. Purcell, Edwin J. *Cálculo*, Editorial Pearson, 2007.
6. Ayres, Frank. *Cálculo*, McGraw-Hill, 2005.
7. Hassler, Norman B. *Análisis Matemático Vol. 1*, Editorial Trillas, 2009.
8. Courant, Richard. *Introducción al Cálculo y Análisis Matemático Vol. I*, Editorial Limusa, 2008.
9. Aleksandrov, A. D., Kolmogorov A. N., Laurentiev M. A. *La matemática: su contenido, métodos y significado*. Madrid, Alianza Universidad, 1985.
10. Boyer C. B. (1959). *The history of the Calculus and its conceptual development*. New York, Dover Publications Inc.

Software: El que se tenga disponible.

12.- PRÁCTICAS PROPUESTAS

Práctica 1.1 Cálculo de áreas amorfas. Proponer al alumno la estimación de áreas de figuras planas amorfas, los métodos para hacer la estimación serán elegidos por los alumnos. Proponer una cota superior y una cota inferior para cada figura. Repetir lo anterior para figuras limitadas por curvas en el plano cartesiano, curvas de las que no se tenga la forma explícita de la función. El profesor retoma la actividad y señala como más adecuado el uso de rectángulos como antecedente de la suma de Riemann.

Práctica 1.2 Grafica las funciones $y = x^2$ y $y' = 2x$; alínealas siguiendo el patrón que se muestra.



A partir del análisis de las gráficas propuestas llena la siguiente tabla

x	Área bajo $y' = 2x$ desde 0 hasta x	$y(x)$
0	0	0
1		
2		
3		
4		

Escribe lo que concluyes a partir de la observación de los resultados obtenidos.

Repite el ejercicio considerando ahora las funciones, $y = 2x$ $y' = 2$

¿Hay semejanza en tus conclusiones en ambos ejercicios? Si no, compáralas con las de tus compañeros. Si tu respuesta es afirmativa, aplica tu conclusión a otro par de funciones.

Escribe un enunciado general usando en él $f(x)$ y $f'(x)$.

Práctica 3.1 Encontrar ese punto especial.

Proveerse de un clavo, hilo y recortes de cartón en forma de rectángulo, triángulo, parábola, semicírculo, semielipse.

Determinar mediante métodos experimentales (sugerido por el profesor) el centroide de cada figura. Un método a usar consiste en hacer pasar un hilo por una perforación próxima al borde de la figura y suspender la figura de dicho hilo mientras se traza una línea sobre la figura en la dirección del hilo. Repetir la misma operación en otro punto también cerca del borde. Cuidar que el hilo pase libremente por las perforaciones y no modificar la dirección del hilo mientras se hace el trazado de la

línea sobre la figura. El centroide se localiza en la intersección de las líneas. Puede trazarse una tercera línea para verificar el procedimiento. Equilibrar la figura sobre la punta de un clavo.

- Plantea una función para cada una de las figuras (construir un modelo matemático) y calcula los centroides correspondientes mediante el Cálculo integral.
- Compara los resultados de ambos métodos.
- Escribe una memoria donde describas como construiste las figuras y sus funciones matemáticas correspondientes.
- Comenta las diferencias de los resultados experimentales con los resultados teóricos.

Práctica 3.2

- Considera un conjunto de funciones e integra cada una de ellas usando todos los paquetes de software disponibles.
- ¿Cuál es más “amigable”?
- ¿Cuál realiza las integrales más rápido?
- ¿Cuál da soluciones más fáciles de interpretar?
- ¿Cuál da la solución más confiable?
- ¿Cuál escogerías para trabajar de manera cotidiana?
- Escribe un reporte con las respuestas a las preguntas anteriores y agrega las dificultades que encontraste en el proceso y las formas en que las resolviste. Compara tus experiencias con tus compañeros.

Práctica 4.1 Granos de trigo en el tablero de ajedrez y Una suma rápida

Cuenta la leyenda sobre el inventor del juego de ajedrez:

El [Brahmán Lahur Sessa](#), también conocido como Sissa Ben Dahir ([Ben](#) Dahir significa “hijo de Dahir”), escuchó que el Rey Iadava estaba triste por la muerte de su hijo y fue a ofrecerle el juego del ajedrez como entretenimiento para olvidar sus penas; el rey quedó tan satisfecho con el juego, que quiso agradecer al joven otorgándole lo que éste pidiera.

Sessa lo único que pidió fue trigo, pidió que el rey le diera un grano de trigo por la primera casilla del ajedrez, el doble por la segunda, y así sucesivamente doblando la cantidad anterior con cada nueva casilla hasta llegar a la casilla número 64. Iadava accedió a esta petición, pero cuando hizo los cálculos se dio cuenta que la petición era imposible de cumplir.

- ¿Cuántos granos de trigo tendría que dar el rey al inventor?
- Si se asigna un décimo de gramo a cada grano de trigo, ¿cuántas toneladas se tendrían? - Si se paga una tonelada por segundo, ¿en cuántos siglos se salda la cuenta?
- Escribe la estrategia que usaste para dar respuesta a las preguntas, ¿Con qué dificultades te encontraste? ¿Cómo las sorteaste?

Una suma rápida.

Gauss ha sido uno de los mejores matemáticos de todos los tiempos. Incluso se le ha denominado el “príncipe de las matemáticas”.

Su vida transcurrió a lo largo de los siglos XVIII y XIX. Este matemático ya realizó grandes proezas matemáticas desde que era un niño, como lo puede demostrar la siguiente anécdota muy conocida:

Cuando Gauss estaba en lo que hoy día denominamos educación Primaria, su maestra (o maestro, según otras versiones), cansada de lidiar con aquellos guajes, les mandó la siguiente “diabólica” tarea: sumar todos los números del 1 al 100. Después de proponer la faena, la susodicha se dispuso a pasar el tiempo en otros menesteres “más provechosos” cuando una voz la sacó de su ensimismamiento:

-¡Ya está!

-¡Anda niño, deja de decir tonterías y no me molestes con tus impertinencias!

-Es 5050

En esto la docente se quedó sin habla y le preguntó a Gauss, que como todos habrán supuesto acertadamente era el causante del asombro de la maestra, por la forma de su resolución, a lo que “Gaussito” contestó: ...

-Completa el texto describiendo el razonamiento que usó Gauss para hacer la suma tan rápidamente. Sugerencia: escribe los números que Gauss sumó, por lo menos los 5 primeros y los 5 últimos; la clave está en agruparlos por parejas.

-Aplica el método encontrado para sumar los primeros 1000 números naturales.

-¿Puede generalizarse esa forma para sumar los primeros n números naturales?

Práctica 4.2 Un vistazo al infinito

Objetivo: Hacer evidente que las series infinitas pueden aparecer en diversos contextos.

Actividad 1.

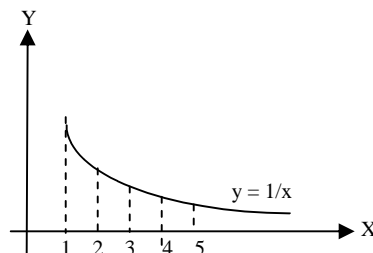
-Cuando un arquero tira una flecha, ésta abandona el arco por tramos; primero la mitad, luego la mitad de la mitad, después la mitad de la mitad de la mitad y así sucesivamente. Representa este proceso mediante una serie, ¿es finita o infinita la serie resultante? Propón un valor para la suma de todos los términos. Se sugiere que el profesor dirija una discusión para llegar a los resultados y solicite a sus alumnos una consulta sobre Zenón de Elea y sus paradojas.

Actividad 2.

- Elegir dos enteros y expresar el cociente de ellos en forma decimal, hacer el cociente de manera que se obtenga la representación decimal infinita ($10/9$ y no $9/10$ ó $5/7$ y no $7/5$). Expresar el cociente como una serie infinita.

-Construir una serie tomando como términos los recíprocos de los números naturales, conocida como serie armónica. Explorar la serie para decidir si está acotada. Sugerencia: se puede, con el auxilio de una hoja de cálculo calcular sumas parciales tomando más y más términos de la serie cada vez. Con base en los resultados obtenidos de las sumas parciales ¿converge la serie, o diverge?

Puede verse que los términos de la serie corresponden a las ordenadas de los enteros en la función $y = 1/x$.



Construye rectángulos tomando como alturas las ordenadas correspondientes a los extremos izquierdos de los subintervalos, calcula las áreas de cada rectángulo y asócialas a los términos de la serie armónica. ¿La serie muestra una área mayor que la de la curva?

Compara la serie con la integral que representa el área bajo la curva. Con base en lo que sabes sobre esta integral impropia, decide si la serie es convergente o divergente.

El profesor retoma la actividad y formaliza a partir de ella los conceptos: serie infinita y convergencia de una serie.

Práctica 4.3 Integración de una función por series

-Encontrar la serie de Taylor de la función $f(x) = e^{-x^2}$, alrededor de $x_0=0$.

-Determinar si la serie converge a la función.

La serie de Taylor es una herramienta para calcular integrales definidas de funciones con primitivas difíciles de determinar como ésta. Una vez que se verifica la convergencia de la serie, el procedimiento consiste en integrar cada uno de los términos y realizar la suma, lo cual nos da una aproximación del valor de la integral dependiendo del número de términos considerados.

-Calcular la integral de la función en el intervalo $[0,1]$ a través de la integración de la serie.